Задание. Задача Штурма-Лиувилля и ряд Фурье.

Требуется написать ряд Фурье для заданной функции $f(x)$ по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)y(x)-\lambda\rho(x)y(x)=0,$$

удовлетворяющих краевым условиям (на концах промежутка)

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0\end{cases}$$

или периодическим условиям

$$\begin{cases}y(a)=y(b)\\ y'(a)=y'(b)\end{cases}$$

Исходными данными для индивидуальных заданий являются: длина промежутка l (полагаем $[a,b]=[0,l]$), функции $p(x)>0,\ \rho(x)>0,\ q(x)>0$; числа $\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2$.

Варианты

1. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0,\ f(x)=\cos(\pi x)$.

2. $l=\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=0,\ \beta_1=\beta_2=1,\ f(x)=\sin x$.

3. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=x$.

4. $l=\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\beta_2=0,\ \beta_1=\alpha_2=1,\ f(x)=1+\sin x$.

5. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=1,\ \rho(x)=1,\ \beta_1=\alpha_2=0,\ \alpha_1=\beta_2=1,\ f(x)=e^x$.

6. $l=2\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=\cos(x)$.

7. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\beta_1=1,\ \beta_2=0,\ f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

8. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1,\ f(x)=\cos(\pi x)$.

9. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=1-x$.

10. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\beta_2=1,\ \alpha_2=0,\ \beta_1=1,\ f(x)=x\sin(\pi x)$.

11. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=1,\ \beta_2=0,\ f(x)=x$.

12. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=0,\ \beta_1=\beta_2=1,\ f(x)=x(2-x)$.

13. $l=\pi/2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=x\sin(x)$.

14. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0,\ f(x)=e^x$.

15. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=x^2$.

16. $l=\pi/2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=1,\ f(x)=x$.

17. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\beta_2=0,\ \beta_1=\alpha_2=1,\ f(x)=2x+1$.

18. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_2=\beta_1=0,\ \alpha_1=\beta_2=1,\ f(x)=x$.

19. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\beta_1=0,\ \beta_2=1,\ f(x)=x\cos(2x)$.

20. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0,\ f(x)=x\cos\dfrac{\pi x}{2}$.

21. $l=4,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$.

22. $l=4\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=x\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

23. $l=10,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1,\ f(x)=x\sin(\pi x)$.

24. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$ периодические краевые условия, $f(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

25. $l=\pi/4, p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1,\ f(x)=e^x\cos(x)$.

26. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\beta_2=1,\ \alpha_2=0,\ \beta_1=1,\ f(x)=x\sin(2\pi x)$.

27. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=-1,\ \beta_2=0,\ f(x)=x^2$.

28. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=\mathrm{sh}(x)$.

29. $l=2,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\beta_1=1,\ \beta_2=-1,\ f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(\pi x)$.

30. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, периодические краевые условия, $f(x)=\mathrm{ch}(x)$.